

Université de Bourgogne  
Projet, Licence 3 Mathématiques

---

# MOUVEMENTS D'UN ROBOT

MONA Raphaël

SAUCE Justine

SIMARD Marine

---

3 Mai 2021

# Table des matières

|           |                                                           |           |
|-----------|-----------------------------------------------------------|-----------|
| <b>I</b>  | <b>Hypothèses et Théorèmes</b>                            | <b>4</b>  |
| <b>1</b>  | <b>Degrés de Liberté et Liaisons</b>                      | <b>5</b>  |
| 1.1       | Caractéristiques des contacts entre les solides . . . . . | 5         |
| 1.2       | Degrés de liberté . . . . .                               | 6         |
| 1.2.1     | Les degrés de liberté et les robots . . . . .             | 6         |
| 1.3       | Les différents types de liaisons . . . . .                | 7         |
| <b>2</b>  | <b>Paramétrage du mouvement d'un solide</b>               | <b>9</b>  |
| 2.1       | Paramétrage de la position . . . . .                      | 9         |
| 2.2       | Paramétrage du mouvement . . . . .                        | 10        |
| 2.2.1     | Isométries et groupe orthogonal . . . . .                 | 10        |
| 2.2.2     | Changements de repères . . . . .                          | 17        |
| 2.2.3     | Matrices de passage homogènes . . . . .                   | 19        |
| <b>3</b>  | <b>Trajectoires et courbes paramétrées</b>                | <b>22</b> |
| 3.1       | Interpolation des points . . . . .                        | 22        |
| 3.1.1     | Un exemple avec trois points . . . . .                    | 23        |
| 3.2       | Courbe paramétrée . . . . .                               | 24        |
| 3.3       | Construire une trajectoire . . . . .                      | 25        |
| <b>II</b> | <b>Applications</b>                                       | <b>28</b> |
| <b>4</b>  | <b>Applications sur différents robots</b>                 | <b>29</b> |
| 4.1       | Exemple d'un bras manipulateur . . . . .                  | 29        |
| 4.1.1     | Repère lié à la chaise 1 . . . . .                        | 31        |
| 4.1.2     | Repère lié au bras 2 . . . . .                            | 31        |
| 4.1.3     | Repères liés à l'avant bras 3 et au bras 4 . . . . .      | 32        |
| 4.1.4     | Repère lié à la pince 5 . . . . .                         | 33        |
| <b>5</b>  | <b>Lien avec les autres sciences</b>                      | <b>34</b> |
| 5.1       | Les robots dans le domaine médical . . . . .              | 34        |
| 5.2       | Astronomie et robots . . . . .                            | 35        |

# Introduction

## Mise en contexte

Quand on parle de robotique, plusieurs idées viennent à l'esprit de chacun de nous. La notion de *science* et celle de *science fiction* étroitement liées par le terme *robot* qui a lui-même sa propre histoire. Pourtant de nos jours, les robots font partie intégrante de notre quotidien, les *bras manipulateurs* sont très courants en industrie, on retrouve des *aspirateurs robotisés* dans nos propres habitations, et encore des *robots chirurgicaux* dans le domaine médical. Chacun ayant pour but de nous faciliter le quotidien en reproduisant des mouvements humains. Notre problématique est de comprendre comment les robots sont capables de reproduire ces mouvements avec tant de précision.

Faisons un premier pas dans notre étude en commençant simplement par observer le robot tri-dimensionnel ci-dessous. De combien de nombres avons-nous besoin pour décrire sa position ? Quel type de mouvement peut-il réaliser et comment les caractériser ? Peut-on définir précisément sa trajectoire ?

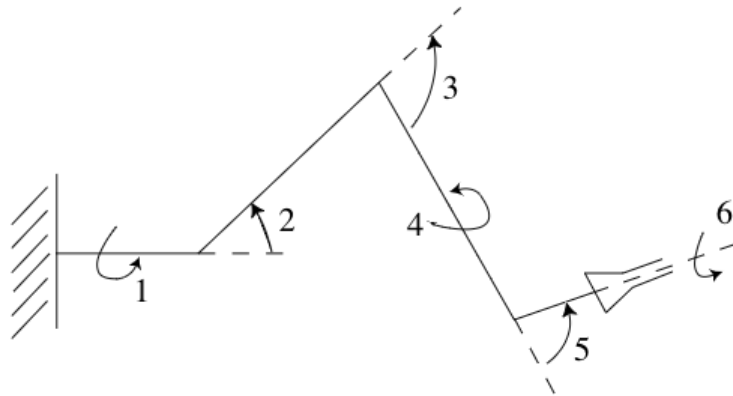


FIGURE 1: Exemple d'un robot 3-dimensionnel

Pour comprendre les mouvements d'un tel robot, il y a trois points fondamentaux :

- Connaître le lien entre les différentes pièces qui constituent ce robot.
- Pouvoir décrire les positions en fonction du temps, et donc pouvoir décrire les mouvements entre les diverses composantes.
- Pouvoir élaborer une trajectoire en fonction des points de passage du robot.

## Organisation

Avant toute chose, il est important de préciser que notre étude se fera essentiellement dans l'espace. Ce qui est démontré dans l'espace est généralement identique et plus direct dans le plan, pour les cas particuliers, nous ferons une distinction. D'autre part, on précisera les références utilisées le plus fréquemment possible.

Nous avons choisi de décomposer notre sujet en deux grandes parties, l'une dédiée à la théorie, tout de même composée de quelques exemples plus concrets, et l'autre à la pratique.

Notre partie théorique aura pour fil conducteur les points fondamentaux listés ci-dessous.

- On donnera les outils nécessaires pour décrire la construction d'un robot et les mouvements qu'il peut effectuer.
- On se penchera ensuite, dans une partie plus conséquente en mathématiques, à caractériser les mouvements du robot.
- Finalement, on clôturera la partie théorique avec un exemple concret, l'élaboration d'une trajectoire.

Nous passerons ensuite à la partie dédiée aux applications, où nous décomposerons un bras manipulateur. Et clôturerons alors notre étude par quelques liens avec d'autres domaines scientifiques.

Première partie

Hypothèses et Théorèmes

# Chapitre 1

## Degrés de Liberté et Liaisons

L'un des points essentiel de notre étude, est la composition des robots ainsi que les liens entre chacune de leurs composantes. Il est important de comprendre quels mouvements peut effectuer un robot, et lesquels il ne peut pas, ce sont les notions de base. Ce chapitre est dédié à cela, on expliquera notamment les termes mécaniques fréquents lorsqu'on parle de robot.

### 1.1 Caractéristiques des contacts entre les solides

**Définition 1.1.1.** Dans un mécanisme, quand une pièce est en contact avec une autre, il y a entre ces deux pièces une *liaison mécanique*.

**Définition 1.1.2.** (Types de contacts)

On peut distinguer trois différents types de contacts entre deux solides :

- contact *ponctuel*
- contact *linéaire* (ou *linéique*)
- contact *surfactive*, dans ce cas, les surfaces de contact sont le plus souvent planes, cylindriques, sphériques, hélicoïdales ou encore coniques.

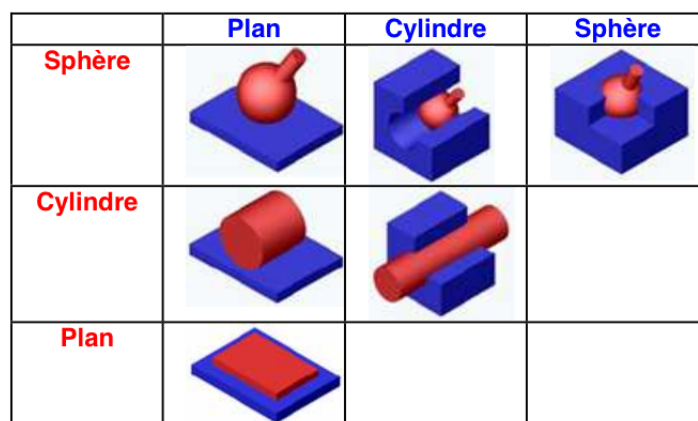


FIGURE 1.1: Les différents contacts [5]

## 1.2 Degrés de liberté

**Définition 1.2.1.** La liaison entre deux pièces se caractérise par le nombre de mobilités que peut avoir l'une des pièces par rapport à l'autre. Ces mobilités (ou mouvements autorisés) sont appelés *degrés de liberté*.

**Proposition 1.2.1.** Ces degrés de liberté correspondent aux mouvements élémentaires (de directions indépendantes).

Dans le plan, on en retrouve trois :

- 2 translations  $T_x$   $T_y$
- 1 rotation autour de l'origine  $O$

Dans l'espace, ils sont au nombre de 6 :

- 3 translations  $T_x$   $T_y$   $T_z$
- 3 rotations  $R_x$   $R_y$   $R_z$

En réalité, il est plus intéressant de considérer les mouvements interdits plutôt que ceux autorisés.

**Définition 1.2.2.** On appelle *degré de liaison* tout degré de liberté supprimé. Le nombre de degrés de liaison est donc le complément (à 6 dans l'espace) du nombre de degrés de liberté. On a donc la relation suivante : degré de liberté + degré de liaison = 6

**Remarque** La nature d'une liaison mécanique dépend donc de la géométrie du contact (ponctuel, linéaire, surfacique), ainsi que du nombre et de la position relative de ces contacts.

### 1.2.1 Les degrés de liberté et les robots

**Réflexion** Reprenons la construction du robot vu en introduction, celui-ci possède 6 degrés de liberté. Sa construction n'est pas unique, mais 6 degrés de liberté (donc au moins 6 mouvements, de directions indépendantes, autorisés) sont nécessaires pour atteindre tout point d'une région donnée avec la pince bien orientée.

On pourrait essayer d'ajouter des bras supplémentaires au robot et l'installer sur un rail mobile, on augmenterait peut-être la taille de la région atteignable mais si l'on ne rajoute pas de mobilités, cela n'augmentera pas le nombre de positions finales de la pince.

Construisez un robot qui n'a que 5 degrés de liberté. Quelle que soit la manière dont vous choisissez 5 mouvements indépendants, décrits chacun par un seul nombre, il y aura des positions de la pince qui seront interdites.

### 1.3 Les différents types de liaisons

Les termes vus précédemment vont nous permettre de décrire les différents types de liaisons mécaniques existants. On détaillera les caractéristiques d'une dizaine d'entre elles.

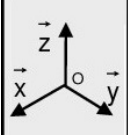
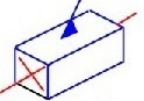
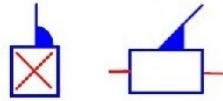
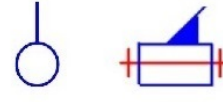
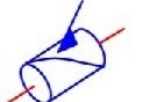
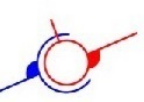
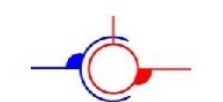
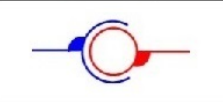
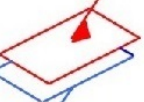
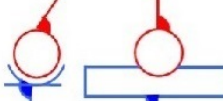
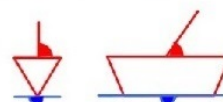
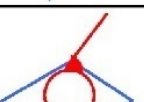
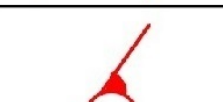
|    | Nom                                                                            | Représentation 3D                                                                   | Représentation 2D                                                                   | Géométrie du contact                       | Forme générale                                                                               | Degrés de liberté |
|-------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------|
|    | Glissière de direction $\vec{x}$                                               |    |    | Plusieurs surfaciques planes               | $\begin{pmatrix} Tx & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$                                     | 1                 |
|    | Pivot d'axe $(O, \vec{x})$                                                     |    |    | Surfacique cylindrique + Surfacique plane  | $\begin{pmatrix} 0 & Rx \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$                                     | 1                 |
|    | Hélicoïdale d'axe $(O, \vec{x})$ et de pas $p$                                 |    |    | Surfacique cylindrique                     | $\begin{pmatrix} Tx & Rx \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$<br>$Rx = Tx \times \frac{2\pi}{p}$ | 1                 |
|  | Pivot glissant d'axe $(O, \vec{x})$                                            |  |  | Surfacique cylindrique                     | $\begin{pmatrix} Tx & Rx \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$                                    | 2                 |
|  | Rotule à doigt de centre O et de rotation interdite $(O, \vec{y})$             |  |  | Surfacique sphérique + linéique rectiligne | $\begin{pmatrix} 0 & Rx \\ 0 & 0 \\ 0 & Rz \end{pmatrix}$                                    | 2                 |
|  | Rotule de centre O                                                             |  |  | Surfacique sphérique                       | $\begin{pmatrix} 0 & Rx \\ 0 & Ry \\ 0 & Rz \end{pmatrix}$                                   | 3                 |
|  | Appui plan de normale $\vec{z}$                                                |  |  | Surfacique plane                           | $\begin{pmatrix} Tx & 0 \\ Ty & 0 \\ 0 & Rz \end{pmatrix}$                                   | 3                 |
|  | Linéaire annulaire de centre O et de direction $\vec{x}$                       |  |  | Linéique annulaire                         | $\begin{pmatrix} Tx & Rx \\ 0 & Ry \\ 0 & Rz \end{pmatrix}$                                  | 4                 |
|  | Linéaire rectiligne de ligne de contact $(O, \vec{x})$ et de normale $\vec{z}$ |  |  | Linéique rectiligne                        | $\begin{pmatrix} Tx & Rx \\ Ty & 0 \\ 0 & Rz \end{pmatrix}$                                  | 4                 |
|  | Ponctuelle de point de contact O et de normale $\vec{z}$                       |  |  | Ponctuel                                   | $\begin{pmatrix} Tx & Rx \\ Ty & Ry \\ 0 & Rz \end{pmatrix}$                                 | 5                 |

FIGURE 1.2: Représentation des différents types de liaisons

La représentation des degrés de liberté prend souvent la forme d'une matrice dont les colonnes définissent le type du mouvement (translation ou rotation) et les lignes la direction considérée ( $x$ ,  $y$  ou  $z$ ).

Autrement dit, pour une liaison *pivot-glissant*, la première ligne de la matrice s'écrit  $(Tx, Rx)$ , elle indique qu'une translation le long de  $(Ox)$  et une rotation autour de  $(Ox)$  sont autorisées. Les deux autres lignes ne comportent que des 0, il n'y a donc pas d'autres mouvements autorisés.

**Remarque**

- Il existe aussi une liaison mécanique appelée *encastrement* qui ne possède aucun degré de liberté.
- La liaison hélicoïdale n'autorise qu'un seul degré de liberté bien que sa matrice décrive deux mouvements autorisés.

# Chapitre 2

## Paramétrage du mouvement d'un solide

L'intérêt du paramétrage est de pouvoir donner une expression mathématique de la position d'un objet en fonction des différents angles de rotations entre les différentes parties du robot. Ceci afin d'élaborer une commande de pilotage donnant une trajectoire attendue.

Dans ce chapitre on va s'atteler à décrire les mouvements d'un robot. On va devoir étudier les mouvements d'un solide dans l'espace. Un tel mouvement doit conserver la forme du solide. Il doit donc préserver les distances et les angles et également préserver l'orientation. Nous verrons alors que chaque mouvement du robot sera une composition de translations et de rotations.

### 2.1 Paramétrage de la position

#### Notations

—  $R(O, x, y, z)$  est un repère orthonormé direct de  $\mathbb{R}^3$

— La position d'un point  $P$  correspond au vecteur  $p = \vec{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ .

**Définition 2.1.1.** (Solide indéformable) [1]

On dit qu'un solide est *indéformable* si, quelque soit le point  $M$  et le point  $N$  du solide, et quelque soit l'instant  $t$ , la distance entre  $M$  et  $N$  est constante, c'est-à-dire,

$$\|m(t) - n(t)\| = c, \text{ avec } c \in \mathbb{R}, \text{ une constante.}$$

**Hypothèse** Puisque l'on souhaite conserver la forme de chaque solide, ceux-ci seront, dans ce qui suit, tous considérés comme indéformables.

**Remarque** On note que, dans un repère lié au solide, les positions des points sont donc constantes. Il y a équivalence entre la position d'un solide et la position du repère lié au solide dans notre repère initial.

**Définition 2.1.2.** Le *paramétrage* consiste à définir :

- un repère associé à chaque solide.
- le (ou les) paramètre(s) permettant de définir la position spatiale de chaque repère.

On peut d'ores et déjà rappeler la notion de translation avant d'entrer dans la section suivante. Dans  $E$ , une translation n'est que le *déplacement* du point  $P$  dans notre repère initial. On note  $P'$  la position de  $P$  après déplacement.

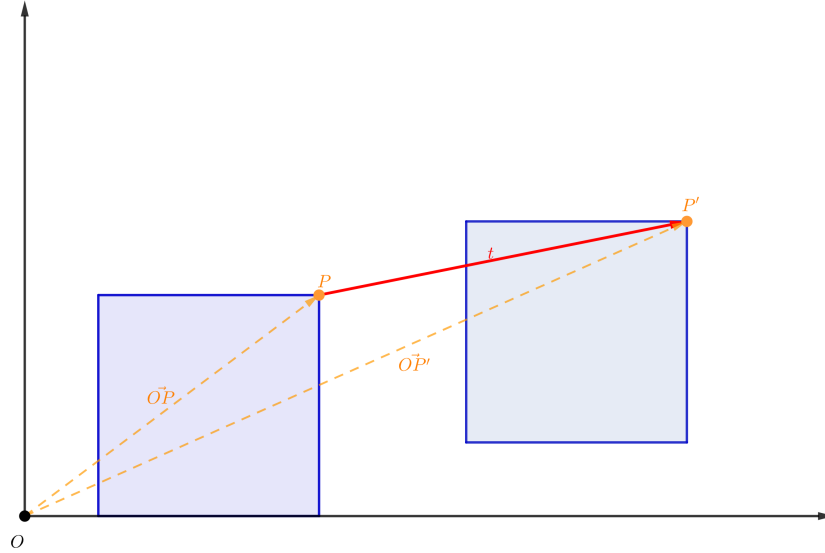


FIGURE 2.1: Exemple de translation dans le plan

$$p' = t + p = \begin{pmatrix} tx \\ ty \end{pmatrix} + \vec{OP}, \text{ avec } t \in \mathbb{R}^2.$$

## 2.2 Paramétrage du mouvement

Le but de cette section va être de spécifier à quel type de mouvements s'attendre lorsqu'on étudie les mouvements d'un robot. On restreindra ensuite notre étude à ces mouvements et on introduira différents outils pour les décrire.

### 2.2.1 Isométries et groupe orthogonal

**Problème 2.2.1.** On souhaite que le mouvement conserve la forme de notre solide, c'est-à-dire qu'il préserve les distances et les angles. Pour caractériser cela on va introduire les deux théorèmes fondamentaux de ce chapitre, ainsi que les définitions nécessaires à leur démonstration.

Un espace euclidien  $E$  est muni d'un produit scalaire donc d'une norme. Il possède donc une distance naturelle :

$$\begin{aligned} d : E \times E &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ (x, y) &\mapsto d(x, y) = \|x - y\| \end{aligned}$$

**Définition 2.2.1.** (Isométrie)

Il y a plusieurs façons de définir une *isométrie*, toutes équivalentes entre elles.

— On appelle isométrie tout endomorphisme  $f$  de  $E$  tel que :

$$\forall x, y \in E, \langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$$

— Autrement dit,

$$\forall x, y \in E, d(f(x), f(y)) = \|f(x) - f(y)\| = \|x - y\| = d(x, y)$$

— C'est-à-dire qu'une isométrie est une application de  $E$  dans  $E$  qui préserve les distances et les angles.

Ces trois façons similaires de définir une isométrie sont dûes aux équivalences entre conserver le produit scalaire, conserver la norme et conserver les distances, que l'on va démontrer.

*Démonstration.* On montre dans un premier temps l'équivalence entre préserver le produit scalaire et préserver la norme. Puis l'équivalence entre préserver la norme et préserver les distances. On raisonne par double inclusion.

1. On commence par montrer que  $f$  conserve le produit scalaire  $\Leftrightarrow f$  conserve la norme. Soit  $f$  un endomorphisme (linéaire) de  $E$ .

$\Rightarrow$ ) On suppose  $\langle f(u), f(v) \rangle = \langle u, v \rangle$  donc  $\langle f(u), f(u) \rangle = \langle u, u \rangle \Leftrightarrow \|f(u)\|^2 = \|u\|^2$  ce qui montre que  $f$  conserve la norme.

$\Leftarrow$ ) On suppose maintenant que  $\|f(u)\| = \|u\|$ , on a par la formule de polarisation que,

$$\begin{aligned} \langle f(u), f(v) \rangle &= \frac{1}{2}(\|f(u) + f(v)\|^2 - \|f(u)\|^2 - \|f(v)\|^2) \\ &= \frac{1}{2}(\|f(u + v)\|^2 - \|f(u)\|^2 - \|f(v)\|^2) \end{aligned}$$

car  $f$  est une application linéaire.

$$= \frac{1}{2}(\|u + v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2)$$

car  $f$  conserve la norme.

On obtient,

$$\langle f(u), f(v) \rangle = \langle u, v \rangle$$

2. On montre maintenant que  $f$  conserve la norme  $\Leftrightarrow f$  conserve les distances :

$\Rightarrow$ ) On suppose  $\|f(u)\| = \|u\|$ , on en déduit que  $\|f(u) - f(v)\| = \|f(u - v)\| = \|u - v\|$  et  $f$  conserve la distance.

$\Leftarrow$ ) On suppose  $\|f(u) - f(v)\| = \|u - v\|$ , on a que  $\|f(u)\| = \|f(u - 0_E)\| = \|f(u) - f(0_E)\| = \|u - 0_E\| = \|u\|$  donc  $f$  conserve la norme.

□

**Définition 2.2.2.** (Rappels algébriques) [4]

1. Soit  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ ,  $A = (a_{i,j})$ . La matrice transposée de  $A$  est notée  ${}^tA = (b_{ij})$  où,

$$(b_{ij}) = (a_{ji}).$$

2. Une matrice est orthogonale si,

$${}^tAA = A{}^tA = Id_n.$$

3. Une transformation linéaire est orthogonale si sa matrice dans la base standard est une matrice orthogonale.

**Théorème 2.2.1.** (Transformation orthogonale)

1. Une matrice est orthogonale si, et seulement si, ses colonnes forment une base orthonormée de  $\mathbb{R}^n$ .
2. Une transformation linéaire préserve les distances et les angles si, et seulement si, sa matrice est orthogonale.

*Démonstration.* 1. Rappelons que si  $u = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  et  $v = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  sont deux vecteurs de  $\mathbb{R}^n$  alors on sait que  $\langle u, v \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n$ .

Si on pose,

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ et } Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

on remarque que  ${}^tX = u$  et  ${}^tY = v$ , par conséquent  $\langle u, v \rangle = {}^tXY = {}^tYX$ . Maintenant posons  $A = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & \cdots & X_n \end{pmatrix}$  avec les  $X_i, \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket$  les vecteurs colonnes de A, alors

$${}^tA = \begin{pmatrix} {}^tX_1 \\ {}^tX_2 \\ \vdots \\ {}^tX_n \end{pmatrix} \text{ avec } {}^tX_i, \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \text{ les vecteurs lignes associés.}$$

On a alors que,

$${}^tAA = \begin{pmatrix} {}^tX_1X_1 & {}^tX_1X_2 & \cdots & {}^tX_1X_n \\ {}^tX_2X_1 & {}^tX_2X_2 & \cdots & {}^tX_2X_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ {}^tX_nX_1 & {}^tX_nX_2 & \cdots & {}^tX_nX_n \end{pmatrix}$$

et A est orthogonale si et seulement si ce produit est égal à la matrice identité, autrement dit on a que  $\langle X_i, X_j \rangle = \delta_{ij} \forall i, j \in \llbracket 1; n \rrbracket$ . Donc, les vecteurs colonnes sont de norme 1 et par échelonnage, sont orthogonaux entre eux, ils forment bien une base orthonormée de E.

2. On va montrer l'équivalence par double implication :

$\Leftarrow$ ) Soit  $f$  une transformation linéaire orthogonale et soit  $M$  sa matrice associée avec  $M \in O(n)$  en utilisant les mêmes notations que précédemment on a alors,

$$\langle f(u), f(v) \rangle = {}^t(MX)(MY) = {}^tX {}^tMMY = {}^tXY$$

car  $M$  est une matrice orthogonale.

Donc,

$$\langle f(u), f(v) \rangle = {}^tXY = \langle u, v \rangle$$

Ainsi  $f$  conserve le produit scalaire, c'est une isométrie et par conséquent elle préserve les angles et les distances.

$\Rightarrow$ ) On suppose que  $f$  conserve le produit scalaire on a donc,

$$\langle f(u), f(v) \rangle = \langle u, v \rangle \Leftrightarrow {}^t(MX)(MY) = {}^tX {}^tMMY = {}^tXY$$

Prenons  $u = e_i$  et  $v = e_j$ ,  $\forall i, j \in \llbracket 1; n \rrbracket$ . On a donc  $\langle u, v \rangle = \delta_{ij}$ . ce qui se traduit par  ${}^tXY = Id_n$ .

On suppose que  ${}^tMM = (c_{ij})$ . Donc,

$${}^tX {}^tMMY = ({}^tX ({}^tMM))Y = \begin{pmatrix} c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \end{pmatrix} Y = c_{ij}$$

On déduit alors des égalités précédentes que  $c_{ij} = \delta_{ij}$ , c'est-à-dire  ${}^tMM = (\delta_{ij}) = Id_n$ . Ce qui conclut la preuve,  $M \in O(n)$  donc  $f$  est une transformation linéaire orthogonale.  $\square$

**Théorème 2.2.2.** Les mouvements qui préservent les distances et les angles dans  $E$  sont des compositions de translations et de transformations orthogonales.

*Démonstration.* On va démontrer que les isométries de  $E$  sont les endomorphismes  $g$  de  $E$  de la forme  $t \circ f$  où  $t$  est une translation et  $f$  une transformation orthogonale.

On montre l'équivalence par double implication :

Il est déjà clair qu'une translation de vecteur  $t$  est une isométrie puisque pour tous  $x, y$  de  $E$ , on a,  $d(x + t, y + t) = \|x + t - (y + t)\| = \|x - y\| = d(x, y)$ .

$\Rightarrow$ ) Montrons que  $g$  est une isométrie. Soit  $f$  une transformation orthogonale et  $t$  notre translation. On a directement,

$$d(g(x), g(y)) = d(t \circ f(x), t \circ f(y)) = d(f(x), f(y)) = \|f(x - y)\| = \|x - y\| = d(x, y)$$

Donc  $g$  est bien une isométrie.

$\Leftarrow$ ) Soit  $g$  une isométrie de  $E$ . Soit  $a = g(0)$ . Alors,  $t_{-a} \circ g$  où  $t_{-a}$  est la translation de vecteur  $-a$ , c'est une isométrie de  $E$  comme composée de deux isométries. De plus elle fixe 0, donc c'est un endomorphisme orthogonal.

$\square$

On va alors s'intéresser aux isométries, en particulier aux matrices orthogonales associées. On note,  $O(n) = \{Q \in M_n(\mathbb{R}) \mid {}^tQQ = Id_n\}$  le groupe des matrices orthogonales.

**Propriétés de  $O(n)$  :**

1.  $Q \in O(n)$  est inversible.
2.  $\det(Q) = \pm 1$

*Démonstration.* On démontrera d'abord 1. puis 2.

1. Soit  $Q \in O(n)$  et  $Q' \in GL_n(\mathbb{R})$  si  $Q$  est inversible alors  $QQ' = Id_n$ , or  ${}^tQQ = Id_n$ , on a donc  $Q' = {}^tQ = Q^{-1}$ . Ce qui démontre que  $Q$  est inversible.

2. Soit  $Q \in O(n)$  alors  ${}^tQQ = Id_n$ .

Donc,

$$\begin{aligned} \det(Id_n) &= \det({}^tQQ) \\ &= \det({}^tQ) \det(Q) \\ &= \det(Q) \det(Q) \\ &= \det(Q)^2 \end{aligned}$$

Donc  $\det(Q) = \pm 1$ .

□

Puisqu'on étudiera essentiellement les matrices de rotation, nous allons restreindre l'étude à celle-ci. On note alors,  $SO(n) = \{Q \in M_n(\mathbb{R}) \mid {}^tQQ = Id_n, \det(Q) = 1\}$  le groupe des matrices de rotation. On considérera  $n = 2$  et  $n = 3$ .

**Proposition 2.2.1.** (Sous-groupe des matrices de rotation)

$SO(n)$  est un sous-groupe de  $O(n)$ .

*Démonstration.* Pour montrer que  $SO(n)$  est un sous-groupe de  $O(n)$ , on montre trois points :

- L'élément neutre  $Id_n$  est dans  $SO(n)$ , en effet,  $\det(Id_n) = 1$  et,  ${}^tId_n Id_n = Id_n$ .
- Soit  $Q \in SO(n)$  et  $H \in SO(n)$ , on veut montrer que,  $QH \in SO(n)$ .

$${}^t(QH) \times (QH) = {}^tH {}^tQ \times QH = {}^tH \times Id_n \times H = Id_n$$

De plus,

$$\det(QH) = \det(Q) \det(H) = 1$$

- On va montrer que  $Q^{-1} \in SO(n)$ ,

$${}^tQ^{-1}Q^{-1} = {}^tQ^{-1} {}^tQ = {}^t(QQ^{-1}) = {}^tId_n = Id_n$$

Et  $\det(Q^{-1}) = \det({}^tQ) = \det(Q) = 1$ .

Donc  $Q^{-1} \in SO(n)$ , on conclut que  $SO(n)$  est un sous groupe de  $O(n)$ .

□

Les matrices de rotation ont une forme particulière puisque leur colonnes forment une base orthonormée et que leur déterminant vaut 1. On explicitera leur forme dans  $\mathbb{R}^2$  et donnera les formes générales dans  $\mathbb{R}^3$ .

Dans  $\mathbb{R}^2$ , on trouve deux formes de matrice,

- $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$  décrit une rotation des axes, d'angle  $\theta$ , directe.
- $R_{-\theta} = R_\theta^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$  décrit une rotation des axes, d'angle  $\theta$ , indirecte.

*Démonstration.*  $Q$  est une matrice de rotation ce qui implique que ses colonnes forment une base orthonormée. En posant,

$$Q = \begin{pmatrix} u & s \\ t & v \end{pmatrix}$$

On a,

$$Q^t Q = Id_2 \Leftrightarrow \begin{cases} u^2 + s^2 = 1 \\ t^2 + v^2 = 1 \\ ut + sv = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \cos \theta, s = \sin \theta \\ t = \cos \phi, v = \sin \phi \\ \cos(\theta - \phi) = 0 \Leftrightarrow \phi = \theta \pm \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

De plus,

$$\det(Q) = 1 \Leftrightarrow uv - st = 1 \Rightarrow \begin{cases} t = \cos(\theta + \frac{\pi}{2}) = -\sin \theta \\ v = \sin(\theta + \frac{\pi}{2}) = \cos \theta \\ \sin(\phi - \theta) = 1 \Leftrightarrow \phi = \theta + \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Donc on obtient,

$$Q = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

De la même manière en utilisant  ${}^t Q Q = Id_2$ , on obtiendra  $Q = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ . □

**Remarque importante** On exprimera la rotation d'un point  $P$  comme  $p' = R_\theta p$  où  $p'$  représente les coordonnées du point après la rotation. En effet on cherchera toujours à connaître  $p'$  en fonction de  $p$ . Pour alléger les notations, et ne pas avoir  $p' = R^{-1}p$  à multiples reprises, on choisit de définir  $R_\theta$ , comme la rotation directe (ie qui envoie  $x$  vers  $y$  dans le plan).

Dans  $\mathbb{R}^3$ , cela est plus complexe, on peut avoir une rotation autour de  $(Ox)$ ,  $(Oy)$  ou  $(Oz)$ . Les matrices de base (pour une rotation dans le sens trigonométrique) sont les suivantes,

$$R_{(x,\theta)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, R_{(y,\theta)} = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}, R_{(z,\theta)} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

*Démonstration.* On va se restreindre à montrer l'existence de  $R_{(z,\theta)}$ , à partir de  $R_\theta$ .

$$\text{Soit } Q = \left( \begin{array}{c|c} U_{2 \times 2} & S_{2 \times 1} \\ \hline T_{1 \times 2} & v \end{array} \right) \text{ et, } {}^tQ = \left( \begin{array}{c|c} {}^tU_{2 \times 2} & {}^tT_{2 \times 1} \\ \hline {}^tS_{1 \times 2} & v \end{array} \right), \text{ avec } v \in \mathbb{R}$$

On a,

$${}^tQQ = \left( \begin{array}{c|c} {}^tUU + {}^tUS & {}^tUT + {}^tSv \\ \hline {}^tTU + Sv & {}^tTT + v^2 \end{array} \right) = Id_3$$

Ce qui nous donne,

$$\Leftrightarrow \begin{cases} {}^tUU + {}^tUS = 1 \\ {}^tUT + {}^tSv = 0 \\ {}^tTU + Sv = 0 \\ {}^tTT + v^2 = 1 \end{cases}$$

On pose  ${}^tUU = R_\theta$ , alors,

$$\Leftrightarrow \begin{cases} {}^tUS = 0 \\ {}^tUT + {}^tSv = 0 \\ {}^tTU + Sv = 0 \\ {}^tTT + v^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 0 \\ T = 0 \\ v^2 = 1 \end{cases}$$

Puisque  $\det({}^tQQ) = 1$ ,

$$\Leftrightarrow \begin{cases} S = 0 \\ T = 0 \\ v = 1 \end{cases}$$

On retrouve alors,  $Q = \left( \begin{array}{c|c} R_\theta & 0_{2 \times 1} \\ \hline 0_{1 \times 2} & 1 \end{array} \right)$ , qui décrit bien une rotation autour de l'axe  $(Oz)$ .

On peut montrer de la même manière la forme de  $R_{(x,\theta)}$  et  $R_{(y,\theta)}$ . □

**Définition 2.2.3.** (Alias et Alibi)

Lors d'un changement de repère ou d'un déplacement, la modification des coordonnées d'un vecteur peut correspondre à une rotation de ce vecteur appelée *alibi* (ou transformation active), ou à une rotation du repère *alias* (ou transformation passive).

Illustrons ces deux cas à l'aide de GeoGebra.

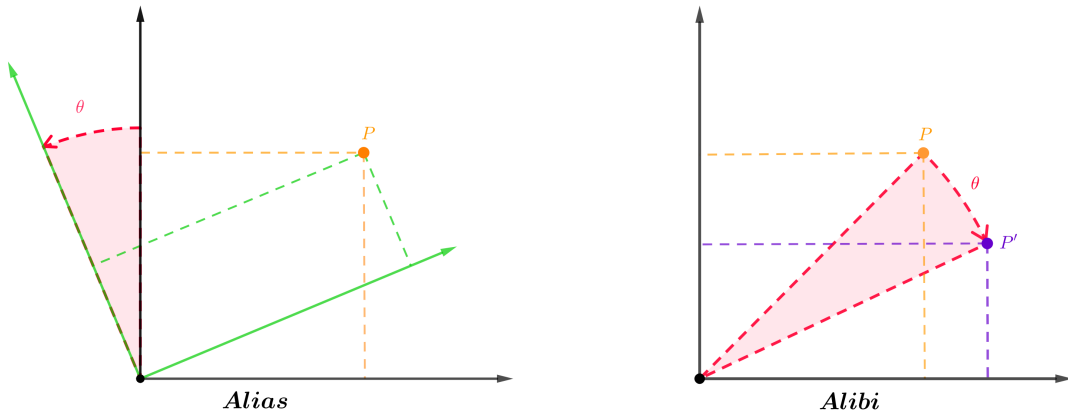


FIGURE 2.2: Alias et Alibi

## 2.2.2 Changements de repères

On travaillera avec plusieurs repères pour pouvoir caractériser la position du robot dépendamment du mouvement, par conséquent, il faudra toujours préciser lequel en indice.

### Notations :

- $R_i(O_i, x_i, y_i, z_i)$  est le repère numéro  $i$ .
- $R_{01}$  est la rotation du repère 0 vers le repère 1 exprimée dans le repère 0.
- $P_1 = R_{01}P_0$  est la position de  $P$  après la rotation  $R_{01}$ , exprimée dans le repère 0.
- $\theta_{01}$  est l'angle entre le repère 0 et le repère 1.

**Remarque** Attention à bien différencier la matrice et le repère, la matrice de rotation est composée de deux chiffres correspondant au repère de départ et d'arrivée. Si le repère dépassait les dizaines, alors la matrice de rotation s'écrirait de la façon suivante :  $R_{11,12}$ .

### Figure de changements de base :

Afin de clarifier la compréhension du mécanisme et d'écrire facilement les relations de passage de la base  $R_0$  à  $R_1$ , on réalise une figure de changement de base, c'est à dire une figure en projection plane qui montre l'angle de passage entre les deux bases dans le plan de projection. Pour illustrer cela, on reprend GeoGebra.

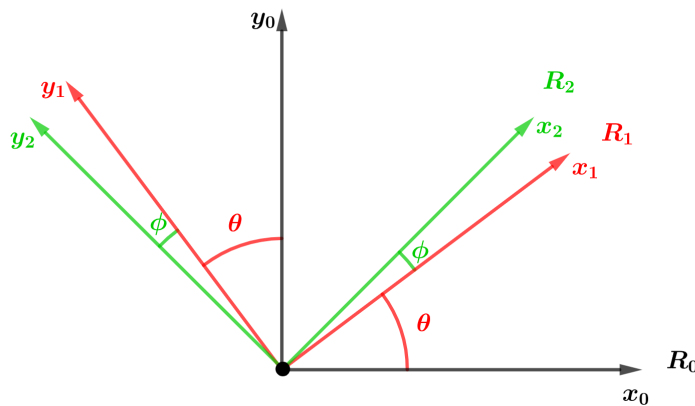


FIGURE 2.3: Figure de changement de base

$$R_{01} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad R_{12} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}$$

A partir de la matrice  $R_{01}$ , on peut passer de  $R_0$  à  $R_1$  ou inversement. Par construction,  $R_{01}$  donne le changement de  $R_0$  à  $R_1$ . Pour passer de  $R_1$  à  $R_0$  on peut simplement utiliser l'inverse de la matrice.

$$R_{10} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = {}^t R_{01} = R_{01}^{-1}$$

**Remarque** On ne parle de changement de base que dans le cas où une rotation entre en jeu. Lorsque le mouvement n'est composé que de translations le mouvement peut tout à fait être décrit dans le repère initial.

**Proposition 2.2.2.** L'application qui à un réel  $\theta$  associe la matrice  $R_\theta$  est un *homomorphisme surjectif* du groupe additif  $(\mathbb{R}, +)$  sur le groupe multiplicatif  $SO(2)$ .

*Démonstration.* La proposition découle immédiatement des formules d'addition des fonctions trigonométriques.

Soient  $\theta, \phi \in [0, 2\pi]$ , alors  $R_{\theta+\phi} = R_\theta R_\phi$  :

$$\begin{aligned} R_\theta R_\phi &= \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \phi - \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \sin \phi + \sin \theta \cos \phi \\ -\sin \theta \cos \phi - \sin \phi \cos \theta & -\sin \theta \sin \phi + \cos \theta \cos \phi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta + \phi) & \sin(\theta + \phi) \\ -\sin(\theta + \phi) & \cos(\theta + \phi) \end{pmatrix} = R_{\theta+\phi} \end{aligned}$$

□

Dans  $\mathbb{R}^3$ , on a trois axes de rotations possibles,  $(Ox)$ ,  $(Oy)$  et  $(Oz)$ , une rotation autour de l'un d'eux revient à une rotation dans le plan autour de  $O$ . On conserve donc les mêmes propriétés.

Pour définir des rotations plus complexes on pourra utiliser les angles d'Euler.

**Définition 2.2.4.** (Angles d'Euler classique) [1]

Les *angles d'Euler* permettent de décrire l'orientation d'un solide. Ils décrivent trois rotations successives :

- $R_{(z,\psi)}$  appelé angle de *précession*.
- $R_{(x_\psi,\theta)}$  appelé angle de *nutation*.
- $R_{(z_\theta,\phi)}$  appelé angle de *rotation propre*.

On note,  $R_{euler} = R_{(z,\psi)} R_{(x_\psi,\theta)} R_{(z_\theta,\phi)}$

$$R_{euler} = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

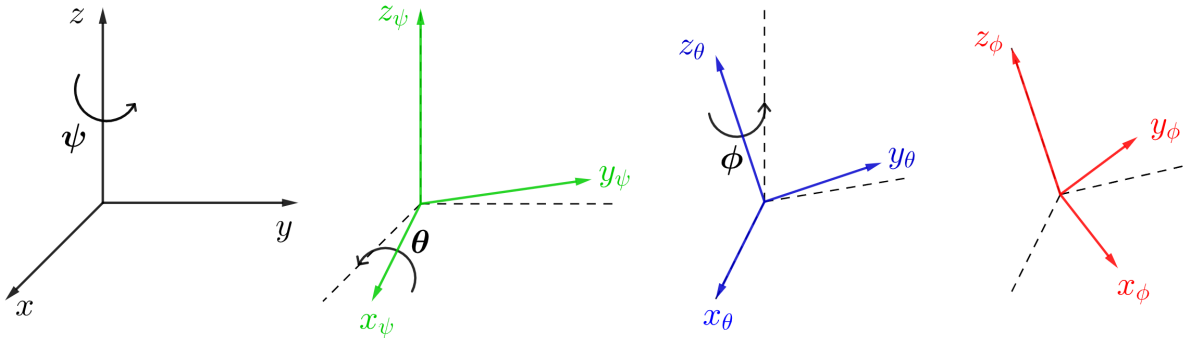


FIGURE 2.4: Angles d'Euler

**Remarque** Dans l'étude des mécanismes, on est confronté à des mouvements de solides conditionnés par les liaisons ne permettant que certains mouvements, et très souvent qu'une rotation. Le problème est naturellement simplifié. Les angles d'Euler sont donc peu utilisés en robotique, mais il est intéressant de voir comment cela fonctionne. Ils sont utiles notamment en aéronautique.

### 2.2.3 Matrices de passage homogènes

Jusqu'à présent nous avons décrit séparément les translations et rotations d'un solide dans l'espace. Nous allons introduire les *systèmes de coordonnées homogènes* qui permettront de décrire un mouvement composé d'une translation et d'une rotation avec une simple multiplication matricielle. [1]

Illustrons une nouvelle fois à l'aide de GeoGebra la situation que l'on souhaite décrire.

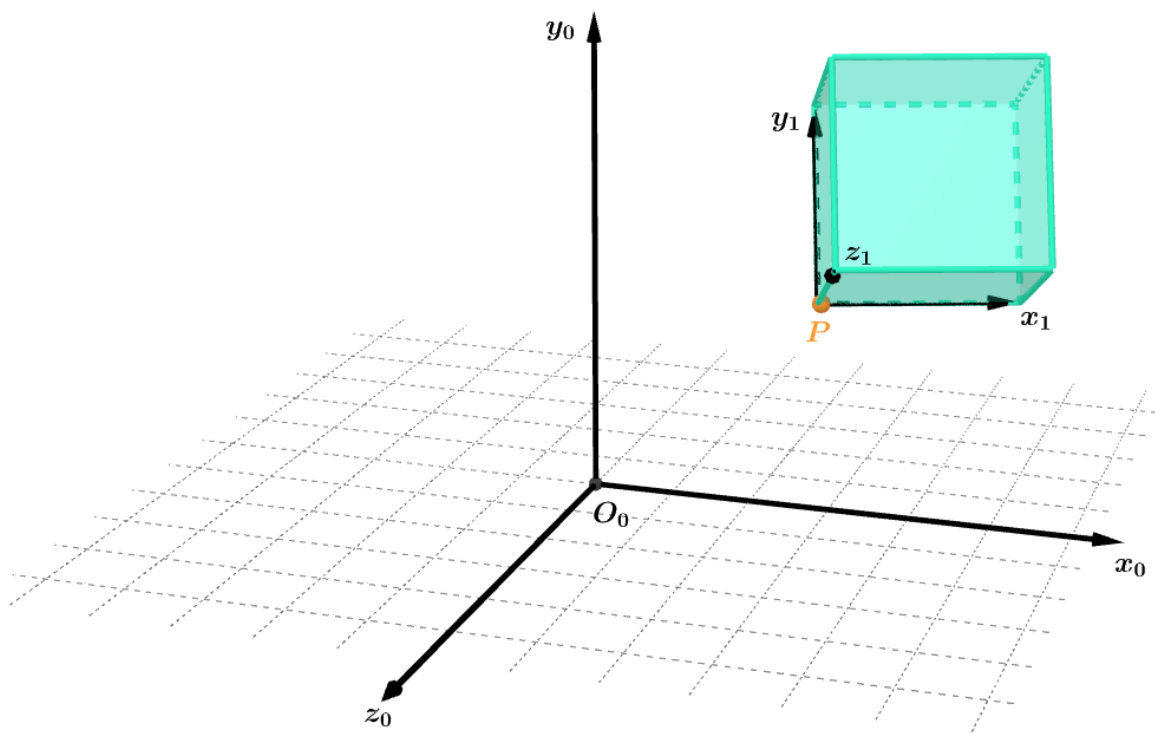


FIGURE 2.5: Situation à décrire

$$P_1 = t + R_\theta P_0 \Rightarrow P_1 = H P_0, \text{ avec } H \text{ la matrice homogène.}$$

Le passage en coordonnées homogènes revient à ajouter un élément à la fin du vecteur de coordonnées, et ayant toujours la valeur 1.

Un point de l'espace en coordonnées homogènes s'écrira alors,  $P_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

**Proposition 2.2.3.** (Translations en coordonnées homogènes)

La matrice de translation homogène définissant une translation de vecteur  $t = \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{pmatrix}$  se note de la façon suivante,

$$T_H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

*Démonstration.*

$$P_1 = T_H P_0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = t_x + x_0 \\ y_1 = t_y + y_0 \\ z_1 = t_z + z_0 \\ 1 = 1 \end{cases}$$

On retrouve bien la translation  $P_0 = t + P_1$  dans le système de coordonnées cartésiennes (c'est à dire sans tenir compte de la dernière coordonnée). □

**Proposition 2.2.4.** (Rotations en coordonnées homogènes)

La matrice de rotation homogène définissant une rotation de matrice  $R_\theta \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$  se note,

$$R_H = \left( \begin{array}{c|c} R_\theta & 0_{3 \times 1} \\ \hline 0_{1 \times 3} & 1 \end{array} \right).$$

*Démonstration.* On va vérifier la relation dans le cas d'une rotation autour de  $(Ox)$ , le cas  $(Oy)$  et  $(Oz)$  sont similaires et pourront être vérifiés de la même façon. La matrice homogène autour de  $(Ox)$  se note,

$$R_{Hx} = \left( \begin{array}{c|c} R_{(x,\theta)} & 0_{3 \times 1} \\ \hline 0_{1 \times 3} & 1 \end{array} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_1 = R_{Hx} P_0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_0 \\ y_1 = \cos(\theta)y_0 + \sin(\theta)z_0 \\ z_1 = \cos(\theta)z_0 - \sin(\theta)y_0 \\ 1 = 1 \end{cases}$$

On a bien la rotation  $P_1 = R_{(x,\theta)} P_0$  en coordonnées cartésiennes. □

Nous allons comprendre tout le sens des coordonnées homogènes maintenant. Elles vont nous permettre de décrire un changement de repère plus complexe qu'une simple rotation. En effet, dans le cas où le nouveau repère a son origine translatée par rapport à l'ancien d'un vecteur  $t_{3 \times 1} = (t_x, t_y, t_z)$  et voit sa base dans le même temps changée (ie. une rotation a été appliquée), la matrice de changement de base étant notée  $R_\theta$ , alors les coordonnées du point  $P_1$  notées  $(x_1, y_1, z_1, 1)$  dans le repère d'arrivée  $R_1$  seront liées aux coordonnées de  $P_0$ ,  $(x_0, y_0, z_0, 1)$  exprimées dans le repère de départ  $R_0$  par la proposition suivante.

**Proposition 2.2.5.** (Matrices de passage homogènes)

La matrice homogène définissant à la fois une translation de vecteur  $t = \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{pmatrix}$  et une rotation dont la matrice est  $R_\theta \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$  se note,

$$H = \left( \begin{array}{c|c} R_\theta & t \\ \hline 0_{1 \times 3} & 1 \end{array} \right).$$

Et on a alors,

$$H^{-1} = \left( \begin{array}{c|c} {}^tR_\theta & -{}^tR_\theta t \\ \hline 0_{1 \times 3} & 1 \end{array} \right) \text{ et } HH' = \left( \begin{array}{c|c} R_\theta R_\phi & R_\theta t' + t \\ \hline 0_{1 \times 3} & 1 \end{array} \right)$$

où  $H$  est la matrice de passage homogène du repère  $R$  à  $R'$  (de rotation  $R_\theta$  et de translation  $t$ ), et  $H'$  celle du repère  $R'$  à  $R''$  (de rotation  $R_\phi$  et de translation  $t'$ ).

*Démonstration.* On va démontrer deux choses, d'abord que  $H$  décrit bien à la fois une translation de vecteur  $t$  et une rotation de matrice  $R_\theta$  dans le système de coordonnées cartésiennes. Et enfin que son inverse vérifie la relation énoncée. (La relation  $HH'$  se retrouve par un simple calcul de matrice par bloc.)

$$P_1 = HP_0 \Leftrightarrow P_1 = \left( \begin{array}{c|c} R_\theta & t \\ \hline 0_{1 \times 3} & 1 \end{array} \right) P_0$$

En calculant par blocs et en retirant la dernière ligne des coordonnées homogènes on retrouve,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = R_\theta \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t$$

On retrouve bien  $P_1 = t + R_\theta P_0$ .

Quant à l'inverse d'une matrice par bloc,

$$\left( \begin{array}{c|c} R_\theta & t \\ \hline 0_{1 \times 3} & 1 \end{array} \right)^{-1} = \left( \begin{array}{c|c} R_\theta^{-1} & -R_\theta^{-1}t \times 1^{-1} \\ \hline 0_{1 \times 3} & 1^{-1} \end{array} \right)$$

Par la propriété des matrices de rotation,  $R_\theta^{-1} = {}^tR_\theta$ , on obtient,

$$H^{-1} = \left( \begin{array}{c|c} {}^tR_\theta & -{}^tR_\theta t \\ \hline 0_{1 \times 3} & 1 \end{array} \right).$$

□

Ainsi, pour passer de l'expression de  $P$  dans  $R_0$  à celle dans  $R_1$ , on utilisera  $H$ , et inversement  $H^{-1}$ ,

$$P_1 = HP_0, P_0 = H^{-1}P_1.$$

**Remarque** Pour garder à l'idée dans quel repère est exprimé le point, nous avons conservé, dans les propositions précédentes, la notation  $P_0$  (et  $P_1$ ) désignant le point  $P$  exprimé dans le repère  $R_0$  (resp.  $R_1$ ). Bien sûr ces repères sont arbitraires, et les propositions s'étendent à tout repère  $R$  et  $R'$ , à condition que la translation et la rotation définissent le mouvement de  $R$  à  $R'$ .

# Chapitre 3

## Trajectoires et courbes paramétrées

Maintenant que nous sommes en mesure de définir les points en lesquels on souhaite que le robot passe, il nous faut pouvoir élaborer une trajectoire à partir de ceux-ci. Le plus simple est de faire un déplacement décomposé en segments de droite, ce qui est très limité. Pour optimiser cela, on souhaite définir la trajectoire à partir d'une courbe paramétrée.

### 3.1 Interpolation des points

On cherche à relier les points en lesquels le robot doit passer par une courbe, pour cela on va utiliser l'interpolation. Celle-ci est définie ici comme une méthode pour trouver une ligne qui relie différents points prédéfinis. Pour faire une interpolation, il faut des coordonnées de points dans le plan (ou dans l'espace). L'interpolation renvoie alors en sortie le polynôme qui passe par ces points.

Dans le cas d'une *interpolation linéaire*, on construit des segments entre chaque point successif. C'est une possibilité pour décrire la trajectoire du mouvement d'un robot. Mais nous souhaitons une courbe plus précise. Une *interpolation polynomiale* qui consiste à utiliser un polynôme unique, de degré aussi grand que nécessaire, pour modéliser localement la courbe peut-être une possibilité. Une forme particulière de l'interpolation polynomiale sera préférée : *l'interpolation de Lagrange*. [2]

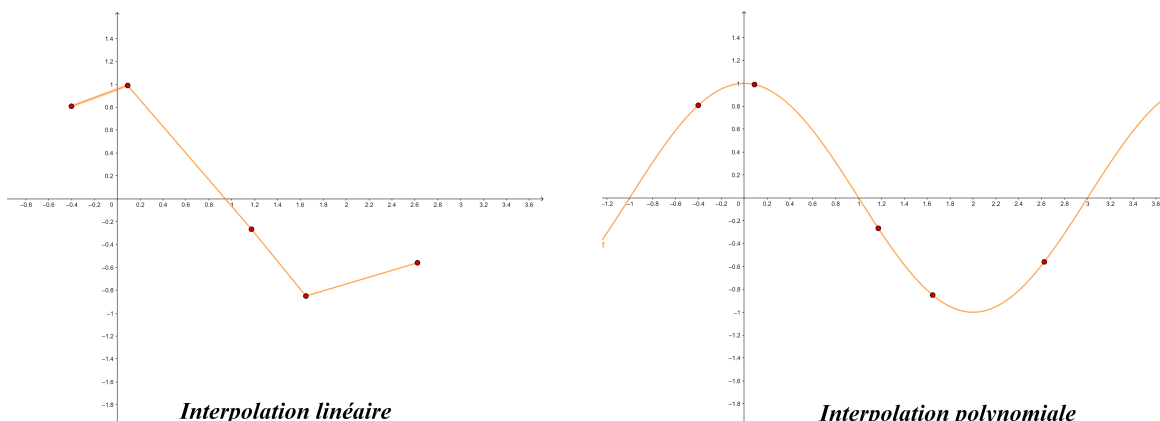


FIGURE 3.1: Différents types d'interpolations

**Théorème 3.1.1.** (Polynômes de Lagrange)

Etant donné  $n + 1$  points distincts  $x_0, x_1, \dots, x_n$  et  $n + 1$  valeurs correspondantes  $y_0, y_1, \dots, y_n$ , il existe un unique polynôme  $\Pi_n \in \mathbb{P}_n$  tel que  $\Pi_n(x_i) = y_i$  pour  $i = 0, \dots, n$  qu'on peut écrire sous la forme,

$$\Pi_n = \sum_{i=0}^n y_i L_i(x), \quad \text{où, } L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Les sous-polynômes  $L_i(x)$  sont appelés polynômes de Lagrange.

La démonstration de ce théorème est admise pour la suite puisqu'elle n'est pas en lien direct avec notre étude, cependant elle est laissée au lecteur en annexes (5.2).

**Explications** Bien que la preuve soit admise, il est tout de même préférable de comprendre le fonctionnement de ces polynômes avant d'appliquer ce théorème. On a ici une somme de sous-polynômes qui s'annulent en toutes les abscisses données sauf une seule, et ce pour chaque point. Ensuite, on multiplie chaque sous-polynôme par l'ordonnée attendue. Il suffira alors d'ajouter ces polynômes pour former un polynôme plus complexe qui saura répondre à nos attentes.

**3.1.1 Un exemple avec trois points**

On choisit les points  $(-1,0)$ ,  $(0,1)$  et  $(1,4)$ . Tout d'abord on ne va considérer que les abscisses de chaque point. On veut 3 polynômes qui vérifient les conditions suivantes :

- Le premier polynôme doit s'annuler en 0 et en 1.
- Le second doit s'annuler en -1 et 1.
- Le dernier doit s'annuler en -1 et 0.

On obtient pour chaque sous-polynôme,

$$L_1(x) = \frac{(x - 0)(x - 1)}{(-1 - 0)(-1 - 1)} = \frac{x^2 - x}{2}$$

$$L_2(x) = \frac{(x + 1)(x - 1)}{(0 + 1)(0 - 1)} = 1 - x^2$$

$$L_3(x) = \frac{(x + 1)(x - 0)}{(1 + 1)(1 - 0)} = \frac{x^2 + x}{2}$$

On traite maintenant les ordonnées, pour cela, il suffit simplement de multiplier chaque sous-polynôme par le résultat qu'on attend de lui.

On obtient alors,

$$\Pi_3(x) = 0 \times \frac{(x^2 - x)}{2} + 1 \times (1 - x^2) + 4 \times \frac{(x^2 + x)}{2} = x^2 + 2x + 1$$

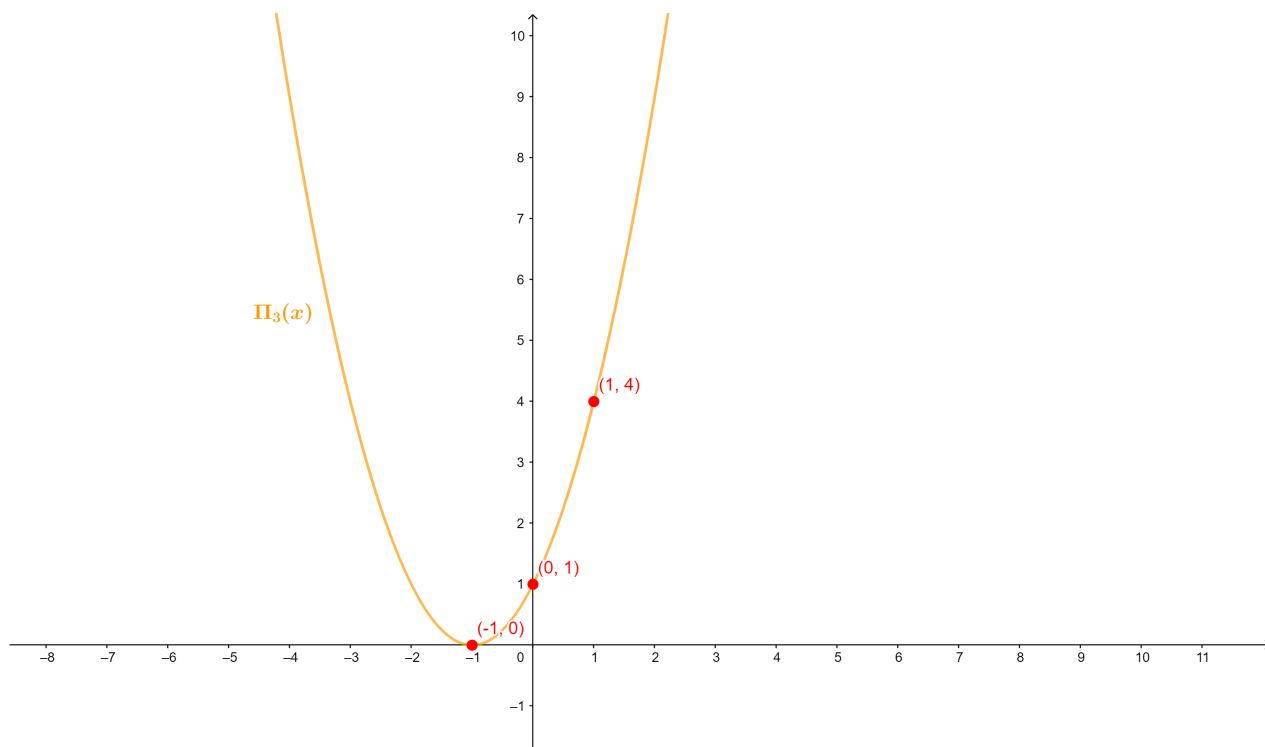


FIGURE 3.2: Représentation graphique de  $\Pi_3$

Les lecteurs les plus avertis auront remarqué qu'il s'agit du polynôme  $(x + 1)^2$  qui a été reformé à partir des trois points que l'on a choisi au départ.

## 3.2 Courbe paramétrée

**Définition 3.2.1.** (Courbe paramétrée) Une courbe paramétrée plane est une application qui, à un réel  $t$  (le paramètre) associe un point du plan. Elle est décrite par l'application

$$\begin{array}{rcl} \alpha & : & I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ & & t \mapsto \alpha(t) \end{array}$$

### Notations

- Le mouvement d'un point est défini par la courbe paramétrée  $\alpha(t)$  de  $E$ .
- La trajectoire correspond alors au support de  $\alpha$ , ie  $\alpha(I)$  avec  $I = [0; +\infty[$ .

**Remarque** Le paramètre  $t$  dans notre étude exprime le temps, mais en général celui-ci n'a pas forcément de lien avec le temps, c'est une notation arbitraire pour désigner un réel.

Les courbes paramétrées vont nous permettre de pouvoir interpoler des points qui ont la même abscisse mais des ordonnées distinctes ou inversement. C'est une particularité qui va nous être très utile pour définir par exemple des *ellipses* ou une *lemniscate de Bernoulli*, qui apparaîtra souvent dans les trajectoires d'un robot.

### 3.3 Construire une trajectoire

Les deux ingrédients principaux nécessaires au calcul de la trajectoire d'un robot sont maintenant en place. Il y a eu beaucoup de théorie pour le moment, voici un exemple concret afin de faire un premier pas dans la partie application qui suivra.

Supposons que le robot doit passer par les points suivants,  $(0, \frac{5}{2})$ ,  $(-1, \frac{3}{2})$ ,  $(0, 0)$ ,  $(3, 0)$ . Comme expliqué précédemment, la solution la plus simple est évidemment de tracer des segments entre les points pour obtenir la trajectoire en utilisant l'interpolation linéaire. Mais pour notre construction, on va chercher à trouver une courbe paramétrée passant par ces quatre points pour plus de précision.

Pour cela on va s'intéresser à *l'ordre de passage* de chacun de ces points. Supposons qu'on choisisse l'ordre suivant :

| Ordre de passage | Coordonnée $x$ | Coordonnée $y$ |
|------------------|----------------|----------------|
| 1                | 0              | $\frac{5}{2}$  |
| 2                | -1             | $\frac{3}{2}$  |
| 3                | 0              | 0              |
| 4                | 3              | 0              |

La situation est la suivante :

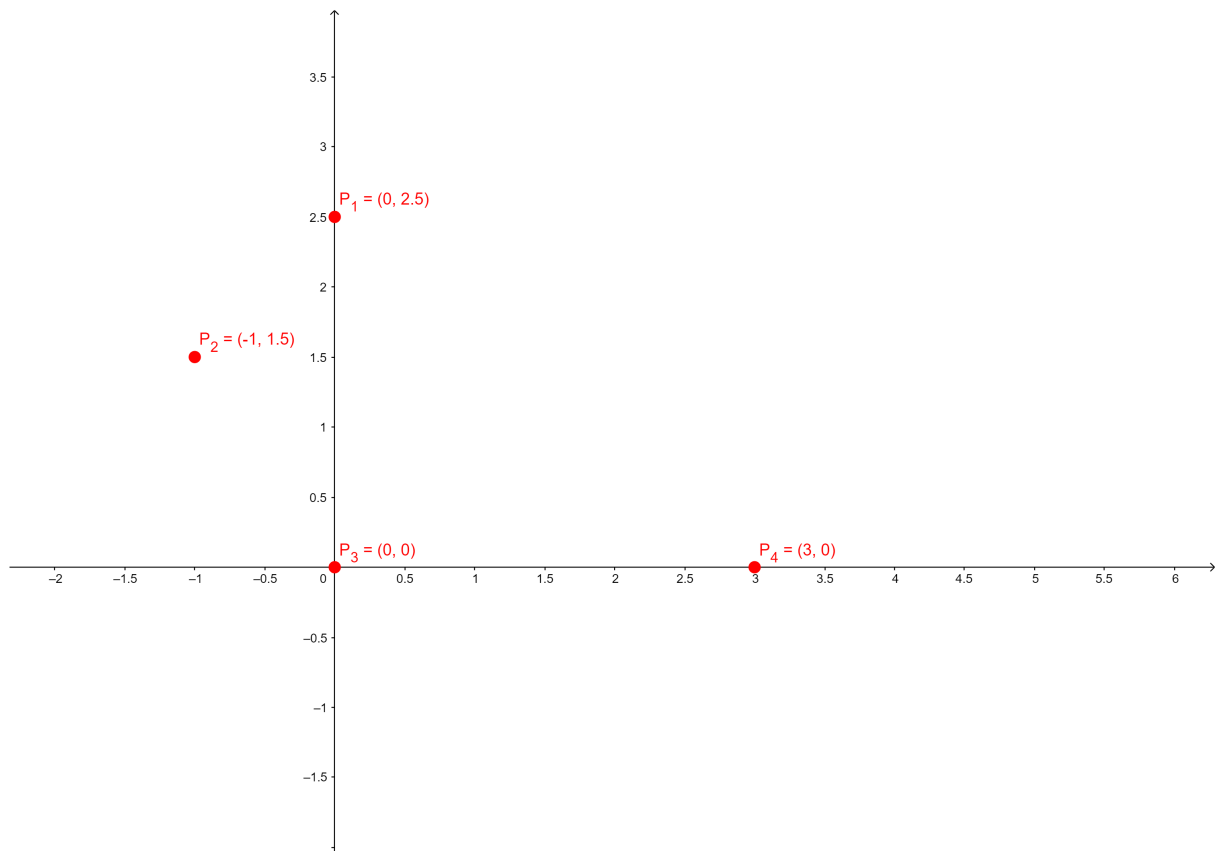


FIGURE 3.3: Ordre de passage des points

Il faut créer deux équations paramétrées, une pour  $x$  et une pour  $y$  qui dépendent chacune de l'ordre de passage. Ce qui signifie qu'on utilisera en abscisse l'ordre de passage et en ordonnée les coordonnées  $x$  (puis  $y$ ). Dès lors, il faut résoudre cette partie en deux temps, d'abord pour  $x$ , puis pour  $y$ .

### Cas de $x$ :

On utilise les polynômes de Lagrange pour interpoler chacune des abscisses, puis on les combine. On utilise les quatre points suivants  $(1, 0)$ ,  $(2, -1)$ ,  $(3, 0)$  et  $(4, 3)$ .

$$\begin{aligned} L_1(t) &= \frac{(t-2) \times (t-3) \times (t-4)}{(1-2) \times (1-3) \times (1-4)} = -\frac{(t-2) \times (t-3) \times (t-4)}{6} = \frac{t^3 - 9t^2 + 26t + 24}{6} \\ L_2(t) &= \frac{(t-1) \times (t-3) \times (t-4)}{(2-1) \times (2-3) \times (2-4)} = -\frac{(t-1) \times (t-3) \times (t-4)}{2} = \frac{t^3 - 8t^2 + 19t - 12}{2} \\ L_3(t) &= \frac{(t-1) \times (t-2) \times (t-4)}{(3-1) \times (3-2) \times (3-4)} = -\frac{(t-1) \times (t-2) \times (t-4)}{2} = \frac{t^3 - 7t^2 + 14t - 8}{2} \\ L_4(t) &= \frac{(t-1) \times (t-2) \times (t-3)}{(4-1) \times (4-2) \times (4-3)} = \frac{(t-1) \times (t-2) \times (t-3)}{6} = \frac{t^3 - 6t^2 + 11t - 6}{6} \end{aligned}$$

Comme expliqué précédemment, il faut combiner ces polynômes ensemble pour obtenir notre équation paramétrée  $x(t)$ , pour cela on multiplie par les ordonnées correspondantes. On obtient,

$$x(t) = 0 \times L_1(t) + (-1) \times L_2(t) + 0 \times L_3(t) + 3 \times L_4(t)$$

Donc,

$$x(t) = \frac{t^3 - 6t^2 + 11t - 6}{2} - \frac{t^3 - 8t^2 + 19t - 12}{2} = t^2 - 4t + 3$$

### Cas de $y$ :

Pour  $y$ , il faut construire 4 sous-polynômes. Mais, il faut bien comprendre ce qu'on a fait et ce qu'il nous reste à faire. Les sous-polynômes que l'on a construit ci-dessus sont construits à partir des abscisses des points que l'on veut interpoler (donc l'ordre de passage). On a interpolé  $x$  en fonction de  $t$  et ici, on veut  $y$  en fonction de  $t$ . Dans les deux cas, les abscisses sont calculées à partir des valeurs de  $t$  (ie, à partir de l'ordre de passage). Donc dans les deux cas, les sous-polynômes sont identiques. Il suffit simplement de les recombinaison en utilisant les ordonnées pour le cas de  $y$ . Les quatre points dans ce cas sont  $(1, \frac{5}{2})$ ,  $(2, \frac{3}{2})$ ,  $(3, 0)$  et  $(4, 0)$ .

Ce qui nous donne,

$$y(t) = \frac{5}{2} \times L_1(t) + \frac{3}{2} \times L_2(t) + 0 \times L_3(t) + 0 \times L_4(t) = \frac{t^3}{3} - \frac{9t^2}{4} + \frac{41t}{12} + 1$$

On obtient alors notre courbe paramétrée  $\alpha(t)$  : 
$$\begin{cases} x(t) = t^2 - 4t + 3 \\ y(t) = \frac{t^3}{3} - \frac{9t^2}{4} + \frac{41t}{12} + 1 \end{cases} .$$

Reprenons Geogebra pour observer le résultat de notre construction.

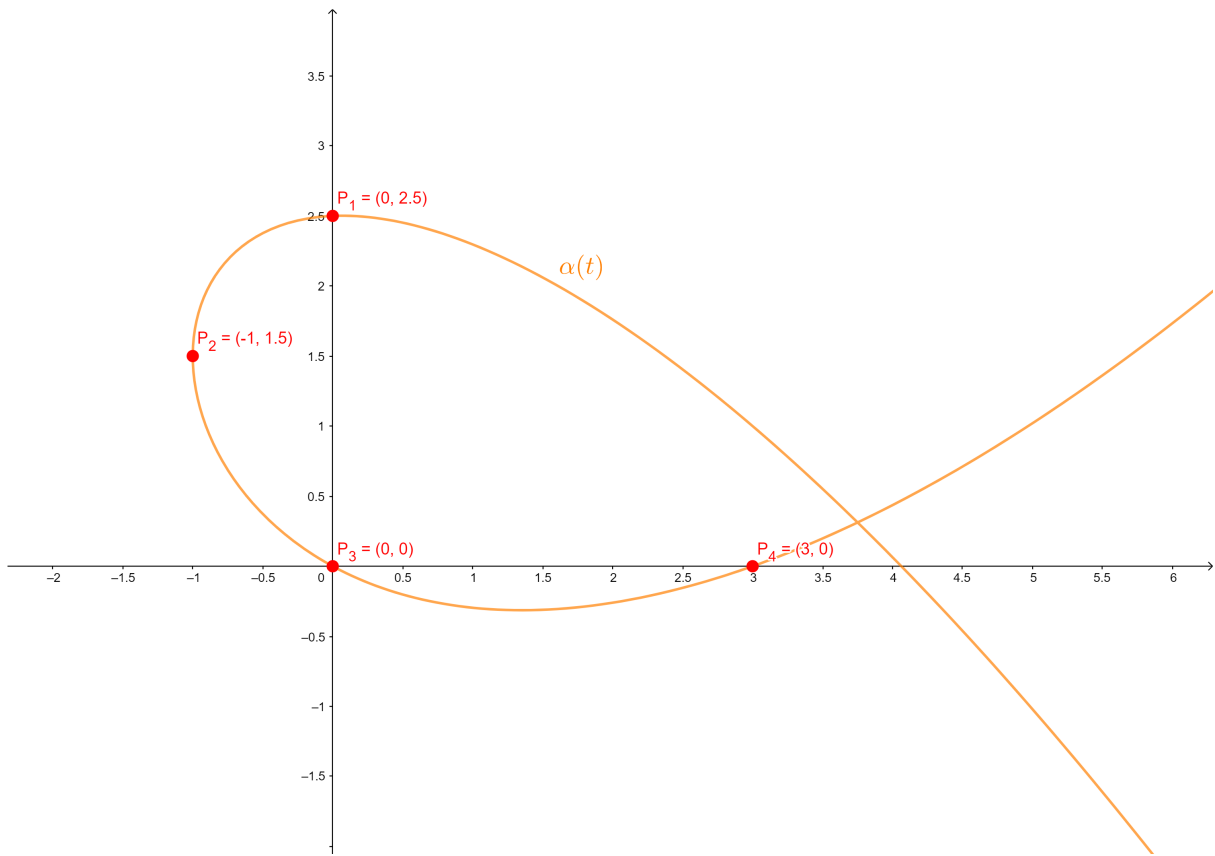


FIGURE 3.4: Courbe paramétrée  $\alpha(t)$  construite

### Résumé de la méthode :

- Définir les points par lesquels le robot doit passer puis l'ordre de passage.
- Calculer les sous-polynômes à partir de l'ordre de passage.
- Combiner ces sous-polynômes avec les abscisses puis les ordonnées de nos points.
- La courbe paramétrée ainsi obtenue définit la trajectoire du robot.

Nous avons, à présent, tous les éléments à disposition pour définir les mouvements d'un robot et élaborer une trajectoire.

# Deuxième partie

## Applications

# Chapitre 4

## Applications sur différents robots

### 4.1 Exemple d'un bras manipulateur

Un bras manipulateur est le bras d'un robot généralement programmable, avec des fonctions similaires à un bras humain. Les liens de ce manipulateur sont reliés par des axes permettant des mouvements de rotation et/ou de translation. Dans le cas d'une imitation complète d'un bras humain, un bras manipulateur a donc 3 mouvements de rotation et 3 mouvements de translation sur son élément terminal, c'est-à-dire 6 axes.

C'est un type de robot commun généralement conçu pour des applications industrielles, dû à sa capacité d'effectuer une variété de tâches avec une grande précision.

Nous étudierons le *Robot Ericc* dans cet exemple d'application.

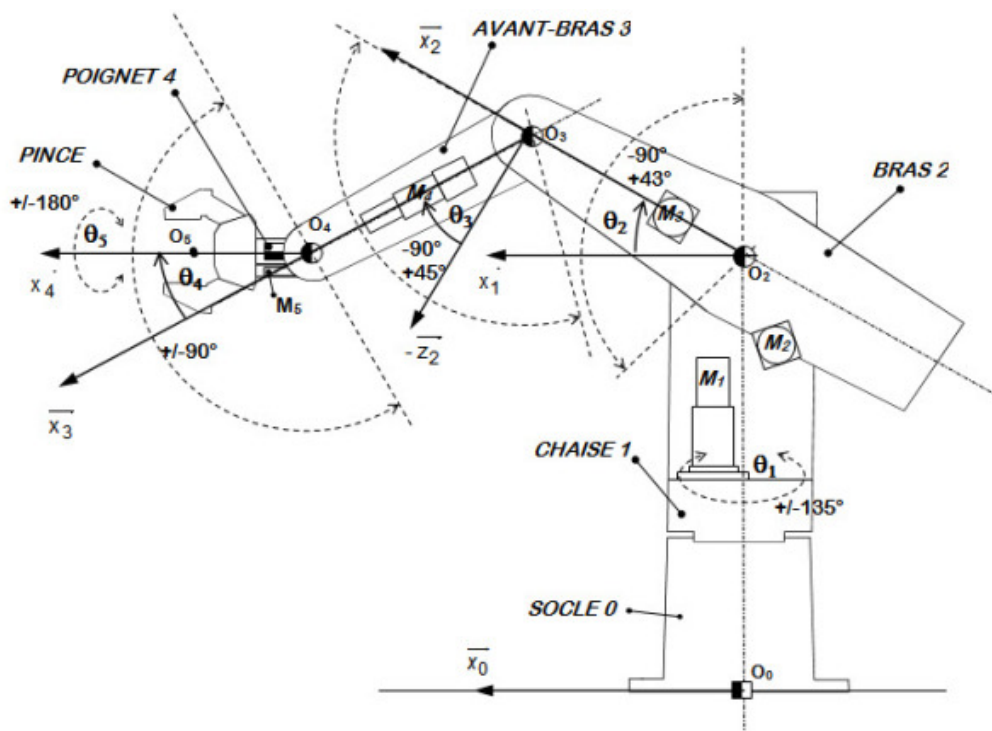


FIGURE 4.1: Paramétrage du robot Ericc

## Décomposition

On considère un robot manipulateur décomposé de la manière suivante :

- 0 : le socle considéré comme fixe
- 1 : la chaise en liaison pivot par rapport au socle
- 2 : le bras en liaison pivot par rapport à la chaise 1
- 3 : l'avant-bras en liaison pivot par rapport au bras 2
- 4 : le poignet en liaison pivot par rapport à l'avant-bras 3
- 5 : la pince en liaison pivot par rapport au poignet 4

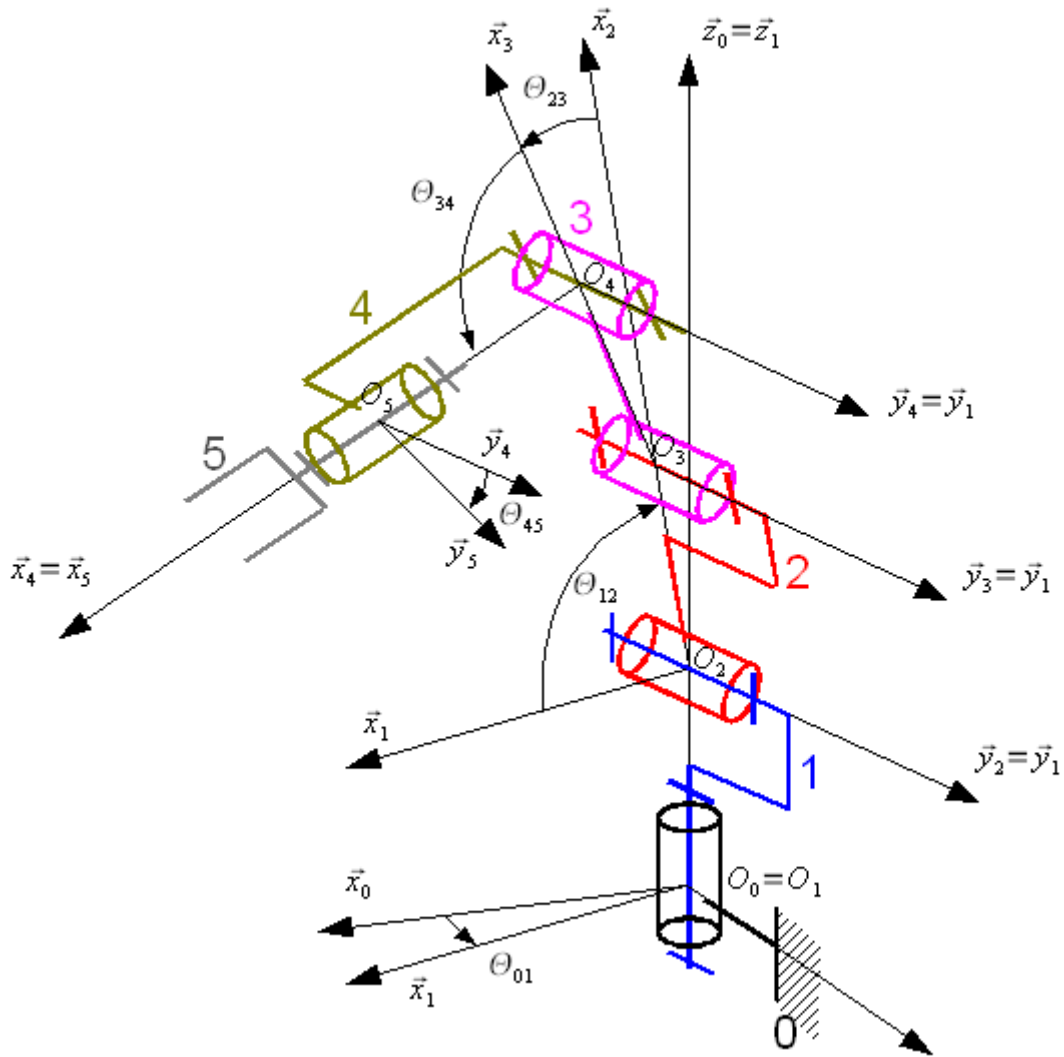


FIGURE 4.2: Liasons mécaniques du robot Ericc

**Remarque** Pour correspondre aux notations des schémas utilisés, on notera  $(\vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$  comme des vecteurs. La signification ne change pas, en mathématiques il n'est pas courant de noter les vecteurs du repère avec des flèches, a contrario en mécanique cela est essentiel.

### 4.1.1 Repère lié à la chaise 1

On pose le repère  $R_0(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  lié au socle 0. La chaise 1 étant en liaison pivot d'axe  $(O_0, \vec{z}_0)$  par rapport au socle 0, le mouvement possible entre 0 et 1 est une rotation d'axe  $(O_0, \vec{z}_0)$ . On peut donc poser un repère  $R_1(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  lié à la chaise 1 tel que  $\vec{z}_1 = \vec{z}_0$  et  $O_0 = O_1$ . On pose  $\theta_{01} = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$ .

On a les relations entre les axes des deux repères : 
$$\begin{cases} \vec{x}_1 = \cos \theta_{01} \cdot \vec{x}_0 + \sin \theta_{01} \cdot \vec{y}_0 \\ \vec{y}_1 = \cos \theta_{01} \cdot \vec{y}_0 - \sin \theta_{01} \cdot \vec{x}_0 \end{cases}.$$

On note  $P$  la position de la pince, les coordonnées de  $P_0$  et  $P_1$  sont liées par la matrice de rotation  $R_{(z_0, \theta_{01})}$ ,

$$R_{(z_0, \theta_{01})} = \begin{pmatrix} \cos \theta_{01} & \sin \theta_{01} & 0 \\ -\sin \theta_{01} & \cos \theta_{01} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

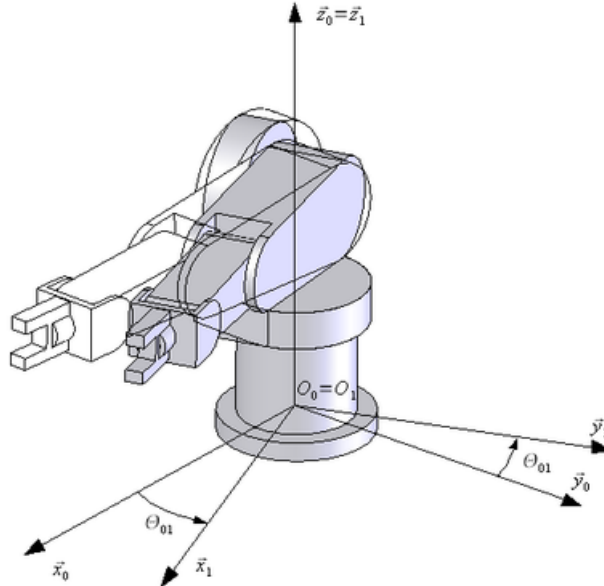


FIGURE 4.3: Chaise 1

### 4.1.2 Repère lié au bras 2

On pose  $R_2(O_2, x_2, y_2, z_2)$  lié au bras 2. Le bras 2 est en liaison pivot d'axe  $(O_1, \vec{y}_1)$  par rapport à la chaise 1. Le seul mouvement possible est une rotation de même axe et d'angle noté  $\theta_{12}$ .

Les relations entre le repère 1 et 2 sont données par : 
$$\begin{cases} \vec{z}_2 = \cos \theta_{12} \cdot \vec{z}_1 + \sin \theta_{12} \cdot \vec{x}_1 \\ \vec{x}_2 = \cos \theta_{12} \cdot \vec{x}_1 - \sin \theta_{12} \cdot \vec{z}_1 \end{cases}.$$

On a alors,

$$R_{(y_1, \theta_{12})} = \begin{pmatrix} \cos \theta_{12} & 0 & -\sin \theta_{12} \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta_{12} & 0 & \cos \theta_{12} \end{pmatrix}$$

Et,  $P_2 = R_{(y_1, \theta_{12})} P_1$ , où  $P_2$  est exprimée dans le repère 1.

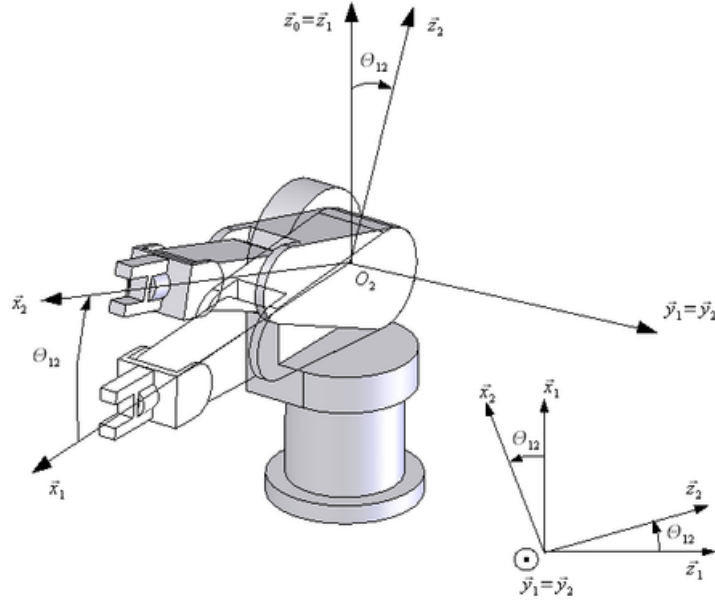


FIGURE 4.4: Bras 2

#### 4.1.3 Repères liés à l'avant bras 3 et au bras 4

Notons,  $R_3(0_3, x_3, y_3, z_3)$  lié à l'avant-bras 3 et  $R_4(0_4, x_4, y_4, z_4)$  lié au poignet 4. Par les mêmes arguments que précédemment on a,

$$\begin{cases} \vec{z}_3 = \cos(\theta_{23}) \cdot \vec{z}_2 + \sin(\theta_{23}) \cdot \vec{x}_2 \\ \vec{x}_3 = \cos(\theta_{23}) \cdot \vec{x}_2 - \sin(\theta_{23}) \cdot \vec{z}_2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \vec{z}_4 = \cos(\theta_{34}) \cdot \vec{z}_3 + \sin(\theta_{34}) \cdot \vec{x}_3 \\ \vec{x}_4 = \cos(\theta_{34}) \cdot \vec{x}_3 - \sin(\theta_{34}) \cdot \vec{z}_3 \end{cases}$$

$$R_{(y_2, \theta_{23})} = \begin{pmatrix} \cos \theta_{23} & 0 & -\sin \theta_{23} \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta_{23} & 0 & \cos \theta_{23} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad R_{(y_3, \theta_{34})} = \begin{pmatrix} \cos \theta_{34} & 0 & -\sin \theta_{34} \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta_{34} & 0 & \cos \theta_{34} \end{pmatrix}$$

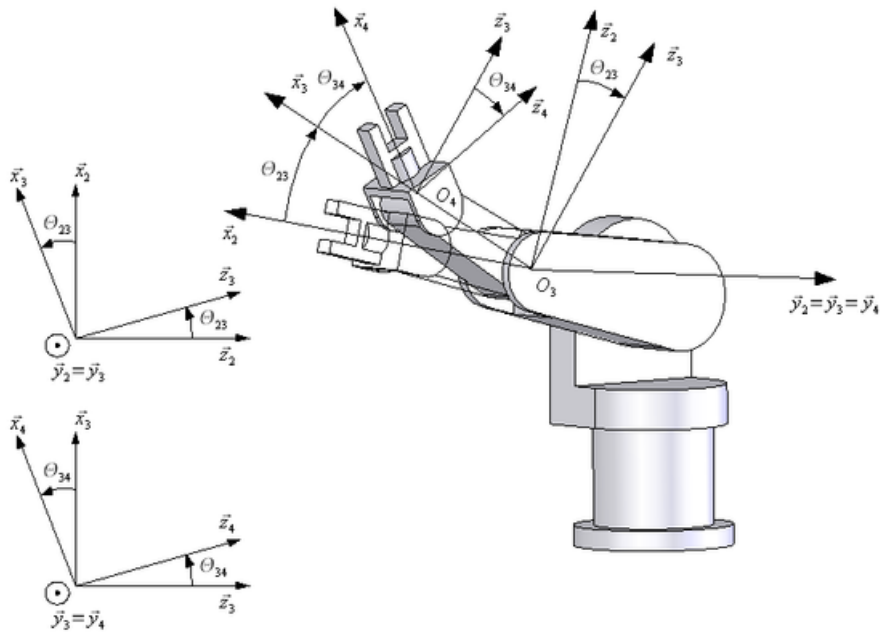


FIGURE 4.5: Avant-bras 3 et poignet 4

#### 4.1.4 Repère lié à la pince 5

La pince 5 est en liaison pivot d'axe  $(O_4, x_4)$  par rapport au poignet 4. Notons  $R_5(O_5, x_5, y_5, z_5)$  le repère lié à la pince 5. On a les relations suivantes :

$$\begin{cases} \vec{y}_5 = \cos(\theta_{45}) \cdot \vec{y}_4 + \sin(\theta_{45}) \cdot \vec{z}_4 \\ \vec{z}_5 = \cos(\theta_{45}) \cdot \vec{z}_4 - \sin(\theta_{45}) \cdot \vec{y}_4 \end{cases}$$

$$R_{(x_4, \theta_{45})} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_{45} & \sin \theta_{45} \\ 0 & -\sin \theta_{45} & \cos \theta_{45} \end{pmatrix}$$

De ce qui précède, la matrice définissant la rotation entre le socle 0 et le pince 5 est donnée par,

$$R_{05} = R_{(z_0, \theta_{01})} R_{(y_1, \theta_{12})} R_{(y_2, \theta_{23})} R_{(y_3, \theta_{34})} R_{(x_4, \theta_{45})}$$

La translation entre le repère 0 et le repère 5 est de vecteur  $t = O_0 \vec{O}_5$ .

On a donc pour définir la position  $P$  dépendamment du repère 0 et du repère 5, la matrice homogène suivante,

$$H_{05} = \left( \begin{array}{c|c} R_{05} & t \\ \hline 0_{1 \times 3} & 1 \end{array} \right)$$

Alors,  $P_5 = H_{05} P_0$

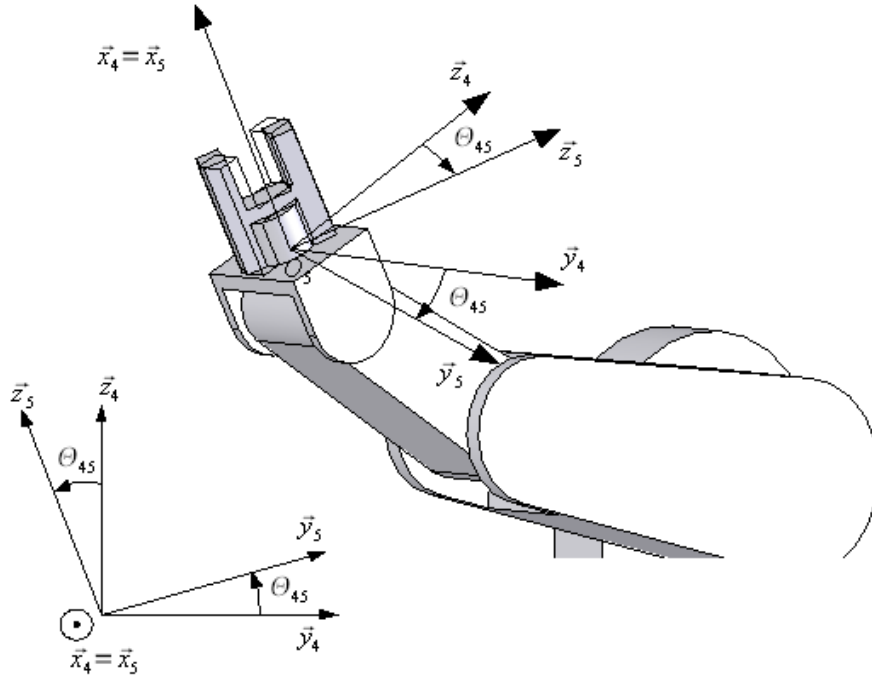


FIGURE 4.6: Pince 5

# Chapitre 5

## Lien avec les autres sciences

### 5.1 Les robots dans le domaine médical

La possibilité pour un robot d'effectuer des mouvements humains avec beaucoup de précision est très utilisée en médecine. Un *robot médical* est un système robotique utilisé dans le cadre d'une application thérapeutique. Un *robot chirurgical* est un cas particulier de robot médical utilisé lors d'une chirurgie. Ce type de robot fait partie du domaine de la cobotique.

Les *robots chirurgicaux* ont fait leur entrée dans les blocs opératoires, depuis plusieurs années déjà, afin d'assister les chirurgiens lors d'opérations sensibles.

Le robot le plus utilisé aujourd'hui dans ce secteur est le robot **Da Vinci**. Il est utilisé, principalement aux États-Unis et en Europe, pour diverses opérations chirurgicales dites mini-invasives dans les cavités abdominales et thoraciques des patients.



FIGURE 5.1: Robot Da Vinci Xi

Le dispositif **ROSA** est dédié aux procédures crâniennes mini-invasives, ou encore le **Sensei** pour traiter les troubles du rythme cardiaque. Le **Cyberknife** est un autre exemple, qui sert à détruire des tumeurs de manière non-invasive.

Les robots dits porte-endoscope servent à assister le chirurgien lors d'une opération en maintenant la caméra lors d'une endoscopie. Des robots comme l'**EndoAssist** ou le **Viky6** sont utilisés dans les hôpitaux dans ce but.

## 5.2 Astronomie et robots

Etre capable de définir chaque mouvement d'un robot et une trajectoire précise à contribuer à donner aux robots la notion d'*autonomie*. Alors que les robots chirurgicaux ne dispose que d'une très faible autonomie pour des raisons de sécurité, le robot **Perseverance** envoyé sur Mars lors de la mission Mars 2020, lui, peut être entièrement autonome.

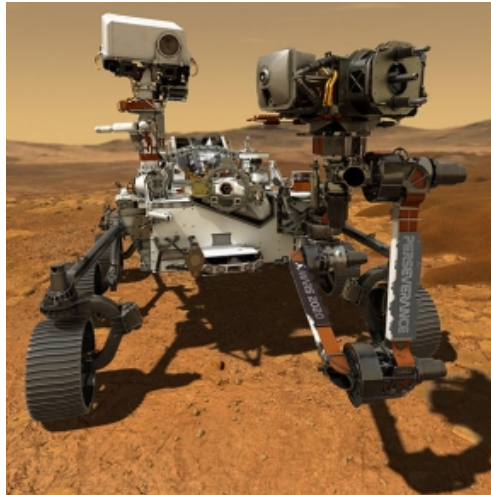


FIGURE 5.2: Perseverance

Perseverance est ce qu'on appelle un *rover*, ou un *astromobile* : il s'agit d'un véhicule qui a été créé dans le but d'explorer un autre corps céleste que la Terre. Les rovers peuvent se déplacer, à la fois de façon autonome ou en étant guidés depuis la Terre, dans le but de mener des observations et des analyses de leur environnement.

Depuis son arrivée sur Mars, le 18 février 2021, Perseverance a commencé à rouler, parcourant ses premiers mètres dans le cratère Jezero. Pendant le premier mois il était principalement occupé à surveiller les progrès de l'hélicoptère **Ingenuity**, qui avait une trentaine de jours pour tenter de voler sur la planète rouge. Une fois que son petit compagnon aura achevé sa mission, le rover va continuer son exploration. Deux itinéraires, autrement dit deux trajectoires, sont envisagés pour le rapprocher du delta, une zone triangulaire probablement formée par le passage de l'eau dans le passé martien.

# Annexes

## Démonstration du théorème d'interpolation de Lagrange

### Théorème 5.2.1. (Polynômes de Lagrange)

Etant donné  $n + 1$  points distincts  $x_0, x_1, \dots, x_n$  et  $n + 1$  valeurs correspondantes  $y_0, y_1, \dots, y_n$ , il existe un unique polynôme  $\Pi_n \in \mathbb{P}_n$  tel que  $\Pi_n(x_i) = y_i$  pour  $i = 0, \dots, n$  qu'on peut écrire sous la forme,

$$\Pi_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i L_i(x), \quad \text{où, } L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Les sous-polynômes  $L_i(x)$  sont appelés les polynômes de Lagrange.

*Démonstration.* On va démontrer l'existence et l'unicité de ce polynôme.

Existence : [6]

On commence par montrer que les polynômes de Lagrange forment une base de  $\mathbb{P}_n$ .

On a bien que  $(L_0(x), L_1(x), \dots, L_n(x))$  est de dimension  $n + 1$  tout comme  $\mathbb{P}_n$ , donc la famille est génératrice. Il faut alors vérifier qu'elle est libre.

On observe que les sous-polynômes  $L_i(x)$  vérifie la propriété suivante,

$$L_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}, \forall i, j \in \llbracket 0; n \rrbracket$$

car, si  $x = x_i$ , alors tous les facteurs sont égaux à 1 et si,  $x = x_j$ , alors l'un des facteurs est nul.

Pour montrer que la famille est libre on pose,

$$\sum_{i=0}^n \alpha_i L_i(x) = 0$$

et on va montrer que tout les  $\alpha_i$  sont nuls.

En posant alors  $x = x_k$  on a que,

$$\sum_{i=0}^n \alpha_i L_i(x_k) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=0}^n \alpha_i \delta_{ik} = \alpha_k = 0$$

Donc les  $\alpha_k$  sont nuls  $\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket$  ainsi la famille est libre. Ce qui montre que  $(L_0(x), L_1(x), \dots, L_n(x))$  est une base de  $\mathbb{P}_n$ . L'existence de  $\Pi_n(x)$  est ainsi démontrée de par sa construction relative à la base  $(L_0(x), L_1(x), \dots, L_n(x))$  de  $\mathbb{P}_n$ , aussi appelée la base de Lagrange.

Unicité :

On raisonne par l'absurde, soient  $P_n$  et  $Q_n$  deux éléments de  $\mathbb{P}_n$  tels que,

$$P_n(x_i) = Q_n(x_i) = y_i, \forall i \in \llbracket 0; n \rrbracket$$

Soit  $R_n = P_n - Q_n \in \mathbb{P}_n$ .  $R_n$  admet  $n + 1$  racines qui sont donc les  $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$  puisque,

$$R_n(x_i) = P_n(x_i) - Q_n(x_i) = y_i - y_i = 0, \forall i \in \llbracket 0; n \rrbracket$$

Puisque  $R_n$  admet bien  $n + 1$  racines et que  $\deg(R) < n + 1$ , car  $R_n \in \mathbb{P}_n$ . Alors  $R_n = 0$ , ce qui implique que  $Q_n = P_n$ .

Ce qui prouve l'unicité des polynômes de Lagrange.

Ainsi on a démontré qu'il existe un unique polynôme  $\Pi_n \in \mathbb{P}_n$  vérifiant les conditions de ce théorème. □

Nous sommes maintenant en mesure de poursuivre avec l'exemple en (3.1), celui-ci nous paraîtra d'autant plus clair.

# Bibliographie

- [1] Bernard Bayle. Robotique : Modélisation et commande des robots manipulateurs, 2009.
- [2] Corentin Blanchard. Interpolation et équations paramétrées, 2016.
- [3] Jean-Louis Boimond. Robotique, université angers.
- [4] Philippe Coiffet. *Les robots, Tome 1, Modélisation et commande*. Hermès Publishing, 1986.
- [5] Cours et Exercices. Modélisation cinématique des liaisons - cours mécanique, 2016.
- [6] Maximilian F. Hasler. Introduction au calcul scientifique, 2002.
- [7] Nelly Lesage. Perseverance : Comprendre la mission mars 2020, 2021.
- [8] WikiMeca. Paramétrage d'un mécanisme - figures de changement de base, 2015.